2022 数学预测题

1. 根据社会人口学研究发现，一个家庭有 X 个孩子的概率模型为：

X	1	2	3	0
概率	$\frac{\alpha}{p}$	α	$\alpha(1-p)$	$\alpha(1-p)^2$

其中 $\alpha>0$，$0<p<1$. 每个孩子的性别是男孩还是女孩的概率均为 $\frac{1}{2}$ 且相互独立，事件 A_i 表示一个家庭有 i 个孩子 $(i=0,1,2,3)$，事件 B 表示一个家庭的男孩比女孩多(例如：一个家庭恰有一个男孩，则该家庭男孩多．)

（1）若 $p=\frac{1}{2}$，求 α，并根据全概率公式 $P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(B|A_i)P(A_i)$，求 $P(B)$；

（2）为了调控未来人口结构，其中参数 p 受到各种因素的影响(例如生育保险的增加，教育、医疗福利的增加等).

①若希望 $P(X=2)$ 增大，如何调控 p 的值？

②是否存在 p 的值使得 $E(X)=\frac{5}{3}$，请说明理由.

【解析】(1) $\frac{\alpha}{p}+\alpha+\alpha(1-p)+\alpha(1-p)^2=1$，$p=\frac{1}{2}$，可得 $\alpha=\frac{4}{15}$

由题意得：$P(B|A_1)=C_1^1\frac{1}{2}$，$P(B|A_2)=C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$，$P(B|A_3)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

由全概率公式，得 $P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(B|A_i)P(A_i)$

$=\frac{1}{2}\frac{\alpha}{p}+C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha+\left(C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)\alpha(1-p)$

$=\frac{1}{2}\frac{\alpha}{p}+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{2}\alpha(1-p)$，又 $p=\frac{1}{2}$，则 $P(B)=\frac{3}{2}\alpha=\frac{2}{5}$；

(2)①由 $\frac{\alpha}{p}+\alpha+\alpha(1-p)+\alpha(1-p)^2=1$，得 $\frac{1}{\alpha}=p^2-3p+\frac{1}{p}+3$，

记 $f(p)=p^2-3p+\frac{1}{p}+3$，$0<p<1$，则 $f'(p)=\frac{2p^3-3p^2-1}{p^2}$，

记 $g(p)=2p^3-3p^2-1$，则 $g'(p)=6p^2-6p=6p(p-1)<0$，

故 $g(p)$ 在 $(0,1)$ 单调递减. ∵ $g(0)=-1$，∴ $g(p)<0$，∴ $f'(p)<0$，$f(p)$ 在 $(0,1)$ 单调递减.

因此增加 p 的取值，$\frac{1}{\alpha}$ 会减小，α 增大，即 $P(X=2)$ 增大.

②假设存在 p 使 $E(X)=\frac{\alpha}{p}+2\alpha+3\alpha(1-p)=\frac{5}{3}$，又 $\frac{1}{\alpha}=p^2-3p+\frac{1}{p}+3$，

将上述两式相乘，得 $\frac{1}{p}+5-3p=\frac{5p^2}{3}-5p+\frac{5}{3p}+5$，

化简得，$5p^3-6p^2+2=0$，

设 $h(p)=5p^3-6p^2+2$，则 $h'(p)=15p^2-12p=3p(5p-4)$，

则 $h(p)$ 在 $\left(0,\frac{4}{5}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{4}{5},1\right)$ 单调递增，$h(p)$ 的最小值为 $h\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{25}>0$，

∴不存在 p_0 使得 $h(p_0)=0$.

2．2020 年 9 月，中国在第 75 届联合国大会上承诺，将采取更加有力的政策和措施，力争于 2030 年之前使二氧化碳的排放达到峰值，努力争取 2060 年之前实现碳中和(简称“双碳目标”)，此举展现了我国应对气候变化的坚定决心，预示着中国经济结构和经济社会运转方式将产生深刻变革，极大促进我国产业链的清洁化和绿色化．新能源汽车、电动汽车是重要的战略新兴产业，对于实现“双碳目标”具有重要的作用．为了解某一地区纯电动汽车销售情况，一机构根据统计数据，用最小二乘法得到电动汽车销量 y(单位：万台)关于 x(年份)的线性回归方程为 $\hat{y}=4.7x-9459.2$，且销量 y 的方差为 $s_y^2=\frac{254}{5}$，年份 x 的方差为 $s_x^2=2$.

(1)求 y 与 x 的相关系数 r，并据此判断电动汽车销量 y 与年份 x 的相关性强弱；

(2)该机构还调查了该地区 90 位购车车主的性别与购车种类情况，得到的数据如下表：

	购买非电动车	购买电动车	总计
男性	39	6	45
女性	30	15	45
总计	69	21	90

请判断有多大的把握认为购买电动汽车与购车车主的性别有关；

(3)在购买电动汽车的车主中按照性别进行分层抽样抽取 7 人，再从这 7 人中随机抽取 3 人，记这 3 人中，男性的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

①参考数据：$\sqrt{5\times127}=\sqrt{635}\approx25$.

②参考公式：线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，若 r>0.9，则可判断 y 与 x 线性相关较强.

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 n＝a＋b＋c＋d.

附表：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

【解析】(1)相关系数为

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}},$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$$=\hat{b}\cdot\sqrt{\frac{ns_x^2}{ns_y^2}}=\hat{b}\cdot\sqrt{\frac{s_x^2}{s_y^2}}=4.7\times\sqrt{\frac{10}{254}}$$

$$=\frac{47}{\sqrt{10}\times\sqrt{254}}=\frac{47}{2\sqrt{635}}\approx\frac{47}{50}=0.94>0.9.$$

故 y 与 x 线性相关较强.

(2)$\because K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$$=\frac{90(39\times15-30\times6)^2}{45\times45\times69\times21}=5.031>5.024.$$

所以有 97.5%的把握认为购买电动汽车与购车车主的性别有关.

(3)抽样比$=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$，男性车主选取 2 人，女性车主选取 5 人，则 X 的可能取值为 0，1，2.

故 $P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7}$，

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_5^2}{C_7^3}=\frac{4}{7}$，

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_5^1}{C_7^3}=\frac{1}{7}$，

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}.$

3．为进一步激发青少年学习中华优秀传统文化的热情，我校举办了“我爱古诗词”对抗赛，在每轮对抗赛中(没有平局，每轮都分出胜负)，高二年级胜高三年级的概率为$\frac{2}{5}$，高一年级胜高三年级的概率为$\frac{1}{3}$，且每轮对抗赛的成绩互不影响.

(1)若高二年级与高三年级进行 4 轮对抗赛，求高三年级在对抗赛中至少有 3 轮胜出的概率；

(2)若高一年级与高三年级进行对抗，高一年级胜 2 轮就停止，否则开始新一轮对抗，但对抗不超过 5 轮，求对抗赛轮数 X 的分布列与数学期望.

【解析】(1)由题意知，高三年级胜高二年级的概率为$\frac{3}{5}$.

设高三年级在 4 轮对抗赛中有 Y 轮胜出，“至少有 3 轮胜出”的概率为 P,

则 $P=P(Y=3)+P(Y=4)=C_4^3\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\frac{2}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{297}{625}.$

(2)由题意知，对抗赛轮数 X 的所有可能取值为 2，3，4，5，

则 $P(X=2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，

$P(X=3)=C_2^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$，

$P(X=4)=C_3^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$，

$P(X=5)=C_4^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3\times1+\left(1-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{16}{27}$，

故 X 的分布列为

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{16}{27}$

$E(X)=2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{4}{27}+4\times\frac{4}{27}+5\times\frac{16}{27}=\frac{38}{9}$.

4．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过左焦点和上顶点的直线 l 与圆$(x-\sqrt{3})^2+y^2=3$ 相切.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设动直线 m 与椭圆 C 相切，判断是否存在以原点 O 为圆心的圆，满足此圆与直线 m 相交于 P_1，P_2(两点均不在坐标轴上)且使得直线 OP_1，OP_2 的斜率之积为定值？若存在，求此圆的方程，若不存在，说明理由.

【解析】(1)设椭圆的半焦距为 c，则$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，①

直线 l: $y=\frac{b}{c}x+b$，则$\frac{|\sqrt{3}b+bc|}{\sqrt{b^2+c^2}}=\sqrt{3}$，

即$\frac{|\sqrt{3}b+bc|}{a}=\sqrt{3}$，②

又 $a^2=b^2+c^2$，③

由①②③解得 $a^2=4$，$b^2=1$，

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)存在符合条件的圆，方程为 $x^2+y^2=5$.

证明：假设存在符合条件的圆，设为 $x^2+y^2=r^2(r>0)$.

①当斜率存在时，设直线 m 的方程为 $y=kx+t$，

联立$\begin{cases}y=kx+t，\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1，\end{cases}$得$(4k^2+1)x^2+8ktx+4t^2-4=0$，

因为直线 m 与椭圆 C 相切，∴$\Delta_1=0$，即 $t^2=4k^2+1$，

由$\begin{cases}y=kx+t，\\ x^2+y^2=r^2，\end{cases}$得$(k^2+1)x^2+2ktx+t^2-r^2=0$，

∴$\Delta_2=(2kt)^2-4(k^2+1)(t^2-r^2)>0$，

设 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{-2kt}{k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{t^2-r^2}{k^2+1}$.

设直线 OP_1，OP_2 的斜率为 k_1，k_2.

$k_1k_2=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{(kx_1+t)(kx_2+t)}{x_1x_2}$

$=\frac{k^2x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2}{x_1x_2}$

$$=\frac{k^2\frac{t^2-r^2}{k^2+1}+kt\cdot\frac{-2kt}{k^2+1}+t^2}{\frac{t^2-r^2}{k^2+1}}$$

$$=\frac{t^2-r^2k^2}{t^2-r^2}.$$

将 $t^2=4k^2+1$ 代入上式，得 $k_1k_2=\frac{(4-r^2)k^2+1}{4k^2+(1-r^2)}$.

要使 k_1k_2 为定值，则 $\frac{4-r^2}{4}=\frac{1}{1-r^2}$，即 $r^2=5$，且 $k_1k_2=-\frac{1}{4}$.

②当斜率不存在时，l: $x=\pm 2$，此时，$x^2+y^2=5$ 与 l 交于 P_1，P_2，也满足 $k_1k_2=-\frac{1}{4}$.

综上，存在圆 $x^2+y^2=5$，使得直线 OP_1，OP_2 的斜率之积 $k_1k_2=-\frac{1}{4}$.

5．在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$和椭圆 C_2：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4$.设 C_1 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且短轴的一个端点的坐标为$(0，-1)$.

(1)求椭圆 C_1 和 C_2 的方程；

(2)设过 C_1 上的一点 $P(x_0，y_0)(x_0y_0\neq 0)$的直线 l 的方程为 $x_0x+2y_0y=2$，直线 l 与 C_2 交于 M，N 两点，平面内一点 Q 满足$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.当点 P 在 C_1 上移动时，

(ⅰ)试探究点 Q 是否在 C_2 上？并说明理由；

(ⅱ)求证：四边形 OMQN 的面积为定值.

【解析】(1)由 C_1 短轴的一个端点的坐标为$(0，-1)$，得 $b=1$，即 $a^2-c^2=1$.

由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $a=\sqrt{2}c$，代入上式，解得 $c=1$，

从而 $a=\sqrt{2}$.

所以 C_1 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，C_2 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)(ⅰ)由 $P(x_0，y_0)$在 C_1 上，得 $x_0^2+2y_0^2=2$，即 $x_0^2=2-2y_0^2$.

由$\begin{cases}x_0x+2y_0y=2，\\x^2+2y^2=8，\end{cases}$消去 y，并结合 $x_0^2+2y_0^2=2$，

整理得 $x^2-2x_0x+2-8y_0^2=0$.

由点 P 在 C_2 的内部，得 $\Delta=(-2x_0)^2-4(2-8y_0^2)=4(x_0^2-2+8y_0^2)=24y_0^2>0$.

设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，MN 的中点为 $G(x_3，y_3)$，

则 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=x_0$，代入 $x_0x+2y_0y=2$，解得 $y_3=y_0$，

即 $G(x_0，y_0)$，即点 G 与点 P 重合.

由$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，得四边形 OMQN 为平行四边形，则 $Q(2x_0，2y_0)$，

从而$(2x_0)^2+2(2y_0)^2=4(x_0^2+2y_0^2)=8$，

故点 $Q(2x_0，2y_0)$在 C_2 上.

(ⅱ)直线 l 的斜率为 $k=-\frac{x_0}{2y_0}$，

所以$|MN|^2=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$

$$=\left(1+\frac{x_0^2}{4y_0^2}\right)[(2x_0)^2-4(2-8y_0^2)]$$

$$=4\left(1+\frac{x_0^2}{4y_0^2}\right)(x_0^2-2+8y_0^2)$$

$=4\left(1+\dfrac{2-2y_0^2}{4y_0^2}\right)(2-2y_0^2-2+8y_0^2)=12(y_0^2+1)$.

而原点 O 到直线 l 的距离

$d=\dfrac{|2|}{\sqrt{x_0^2+4y_0^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2-2y_0^2+4y_0^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+y_0^2}}$，

所以，四边形 OMQN 的面积 $S=2S_{\triangle OMN}=|MN|\cdot d=2\sqrt{6}$.

故四边形 OMQN 的面积为定值.

6．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，M 是椭圆 C 上异于左、右顶点 A，B 的任一点．直线 MB 交直线 $x=4$ 于点 Q，直线 AQ 交椭圆 C 于点 N.

(1)设直线 AM，AN 的斜率分别为 k_1，k_2，求 $k_1\cdot k_2$；

(2)求△AMN 面积的最大值．

【解析】(1)由题意设 $M(x_1,y_1)$，$Q(4,y_0)$，$N(x_2,y_2)$，又 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，

$\therefore k_1=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，$k_2=k_{AQ}=\dfrac{y_0}{4+2}=\dfrac{y_0}{6}$，

直线 BM: $y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令 $x=4$，则 $y_0=\dfrac{2y_1}{x_1-2}$，

$\therefore k_1\cdot k_2=\dfrac{y_1}{x_1+2}\times\dfrac{y_0}{6}=\dfrac{y_1}{x_1+2}\times\dfrac{y_1}{3(x_1-2)}=\dfrac{y_1^2}{3(x_1^2-4)}$，

由 $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$，则 $y_1^2=3\left(1-\dfrac{x_1^2}{4}\right)=\dfrac{3}{4}(4-x_1^2)$，

代入上式可得：$k_1\cdot k_2=-\dfrac{1}{4}$.

(2) 设直线 MN: $x=my+t$，联立 $\begin{cases}x=my+t,\\3x^2+4y^2-12=0,\end{cases}$

消去 x 有 $(3m^2+4)y^2+6mty+3t^2-12=0$，$\Delta>0$，

$\therefore\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{6mt}{3m^2+4},\\y_1y_2=\dfrac{3t^2-12}{3m^2+4},\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{8t}{3m^2+4},\\x_1x_2=\dfrac{4t^2-12m^2}{3m^2+4},\end{cases}$

由 $k_1\cdot k_2=\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=-\dfrac{1}{4}$，

$\therefore\dfrac{3t^2-12}{4t^2+16t+16}=-\dfrac{1}{4}$，化简得 $t^2+t-2=0$，

解得 $t=1$ 或 $t=-2$(舍)，

此时 MN: $x=my+1$，满足 $\Delta>0$，

$S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}|AF_2||y_1-y_2|=\dfrac{3}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{18\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$，

令 $\lambda=\sqrt{m^2+1}\geqslant1$，则 $m^2=\lambda^2-1$，

则 $S_{\triangle AMN}=\dfrac{18\lambda}{3\lambda^2+1}=\dfrac{18}{3\lambda+\dfrac{1}{\lambda}}$，

由于 $3\lambda+\dfrac{1}{\lambda}$在$[1,+\infty)$递增，

则 $\lambda=1$ 时，△AMN 的最小值为$\dfrac{9}{2}$，此时 $m=0$，l_{MN}: $x=1$.

7．已知函数 $f(x)=\dfrac{4a}{a^2e^x+1}+x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=1$，求证：当 $x>0$ 时，$x(f(x)-x)<\dfrac{4}{e}$；

(2)讨论方程 $f(x)=2$ 的根的个数.

【解析】(1)由 $a=1$，所以 $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}+x$，

所以 $x(f(x)-x)=\dfrac{4x}{e^x+1}$，

要证 $x(f(x)-x)<\dfrac{4}{e}$，即证 $\dfrac{4x}{e^x+1}<\dfrac{4}{e}$，

即证 $e^x+1>ex$，即证 $e^x-ex+1>0$，

令 $g(x)=e^x-ex+1$，则 $g'(x)=e^x-e$，

所以 $g(x)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增，

所以 $g(x)\geqslant g(1)=1>0$ 成立，所以 $x(f(x)-x)<\dfrac{4}{e}$.

(2)$f(x)=\dfrac{4a}{a^2e^x+1}+x$，

当 $x\to-\infty$时，$f(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，

(i)当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $f(x)=2$ 有唯一解；

(ii)当 $a>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{-4a^3e^x}{\left(a^2e^x+1\right)^2}+1$

$=-\dfrac{4a}{a^2e^x+\dfrac{1}{a^2e^x}+2}+1$，

因为 $a^2e^x>0$，所以 $a^2e^x+\dfrac{1}{a^2e^x}\geqslant2$，所以 $f'(x)\geqslant1-a$，

①当 $1-a\geqslant0$，即 $0<a\leqslant1$ 时，$f'(x)\geqslant0$，所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $f(x)=2$ 有唯一解；

②当 $1-a<0$，即 $a>1$ 时，

$y=a^2e^x+\dfrac{1}{a^2e^x}+2$ 在$(-\infty，-2\ln a)$上单调递减，在$(-2\ln a，+\infty)$上单调递增，

所以 $f'(x)$在$(-\infty，-2\ln a)$上单调递减，在$(-2\ln a，+\infty)$上单调递增，

当 $x\to-\infty$时，$f'(x)\to1$；当 $x\to+\infty$时，$f'(x)\to1$，

所以存在 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$ 使得 $f'(x_1)=0$，$f'(x_2)=0$，且 $x_1<-2\ln a<x_2$，

则 $f(x)$在$\left(-\infty，x_1\right)$上单调递增，在$\left(x_1，x_2\right)$上单调递减，在$\left(x_2，+\infty\right)$上单调递增，

所以 $f(x)_{极大}=f(x_1)$，$f(x)_{极小}=f(x_2)$，

$f(x_1)>f(-2\ln a)>f(x_2)$，

因为 $f(-2\ln a)=2a-2\ln a$，记 $g(a)=2a-2\ln a$，

则 $g'(a)=2\left(1-\dfrac{1}{a}\right)$，

因为 $a>1$，所以 $g'(a)>0$，即 $g(a)$在$(1，+\infty)$上单调递增，所以 $f(-2\ln a)=g(a)>g(1)=2$，则 $f(x_1)>2$，又因为 $f(0)=\dfrac{4a}{a^2+1}=\dfrac{4}{a+\dfrac{1}{a}}<2$，且 $x_1<-2\ln a<0$，所以 $f(x_2)<2$，

所以当 $a>1$ 时，$f(x)=2$ 有三个根.

综上所述：当 $a\leqslant1$ 时，$f(x)=2$ 仅有一个实根；当 $a>1$ 时，$f(x)=2$ 有三个不相等的实根.

8．已知函数 $f(x)=\ln(x+a)-\dfrac{x-1}{x+a}$，函数 $g(x)$满足 $\ln\left[g(x)+x^2\right]=\ln x+x-a$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)若 $g(x)$有两个不同的零点 x_1，x_2，证明：$x_1x_2<1$.

【解析】(1)由已知得函数 $f(x)$的定义域为$\left(-a，+\infty\right)$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{x+a-(x-1)}{(x+a)^2}=\dfrac{x-1}{(x+a)^2}$，

∴当 $-a\geq 1$，即 $a\leq -1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(-a，+\infty)$上单调递增，

∴当 $-a<1$，即 $a>-1$ 时，若 $-a<x<1$ 时，$f'(x)<0$，若 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(-a，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增.

综上所述，当 $a\leq -1$ 时，$f(x)$在$(-a，+\infty)$上单调递增；

当 $a>-1$ 时，$f(x)$在$(-a，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增.

(2)∵$\ln\left[g(x)+x^2\right]=\ln x+x-a$，∴$g(x)=x\cdot e^{x-a}-x^2=x\cdot(e^{x-a}-x)$，其定义域为$(0，+\infty)$，

$g(x)=x\cdot e^{x-a}-x^2=x\cdot(e^{x-a}-x)=0$ 等价于 $e^{x-a}-x=0$，即 $x-\ln x=a$，

设 $h(x)=x-\ln x(x>0)$，∴$h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

令 $h'(x)>0$，则 $x>1$；令 $h'(x)<0$，则 $0<x<1$.

所以函数 $h(x)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增，

∵函数 $g(x)$有两个不同的零点 x_1，x_2，即 $h(x)=a$ 有两个不同的根，∴$a>h(1)=1$，

∴$0<x_1<1<x_2$，且 $h(x_1)=h(x_2)=a$，

令 $\varphi(x)=h(x)-h\left(\dfrac{1}{x}\right)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x(0<x<1)$，

则 $\varphi'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}>0$ 对任意的 $x\in(0，1)$恒成立，

所以函数 $\varphi(x)$在$(0，1)$上单调递增，

所以 $\varphi(x)<\varphi(1)=0$，

即当 $0<x<1$ 时，$h(x)<h\left(\dfrac{1}{x}\right)$，

又 $0<x_1<1$，∴$h(x_1)=h(x_2)<h\left(\dfrac{1}{x_1}\right)$，

∵$x_2>1$，$\dfrac{1}{x_1}>1$，且 $h(x)$在$(1，+\infty)$上单调递增，

∴$x_2<\dfrac{1}{x_1}$，故 $x_1x_2<1$，得证.

9．已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=e^x-ax-1$，$g(x)=x-\ln(x+1)$(e 是自然对数的底数).

(1)讨论函数 $f(x)$极值点的个数；

(2)若 $f(x)=e^x-ax-1\geq 0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 a 的值；

(3)在第(2)小题的条件下，$\exists x\in[0，+\infty)$，$f(x)<kg(x)$，求实数 k 的取值范围.

【解析】(1)因为 $f(x)=e^x-ax-1$，所以 $f'(x)=e^x-a$，

当 $a\leq 0$ 时，对$\forall x\in\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x-a>0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$是增函数，此时函数不存在极值，所以函数 $f(x)$没有极值点；

当 $a>0$ 时，$f'(x)=e^x-a$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln a$，

若 $x\in(-\infty，\ln a)$，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(-\infty，\ln a)$上是减函数，

若 $x\in(\ln a，+\infty)$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(\ln a，+\infty)$上是增函数，

当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$取得极小值；

函数 $f(x)$有且仅有一个极小值点 $x=\ln a$，

所以当 $a\leq 0$ 时，$f(x)$没有极值点，当 $a>0$ 时，$f(x)$有一个极小值点.

(2)因为 $f(x)=e^x-ax-1\geq 0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

当 $a\leq 0$ 时，$f(-1)=e^{-1}+a-1<0$，不合题意舍去；

当 $a>0$ 时，由(1)可知当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$取得极小值 $f(\ln a)=a-a\ln a-1$；因为 $f(x)=e^x-ax-1\geq 0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以 $f(\ln a)=a-a\ln a-1\geq 0$，

又因为 $0\leqslant f(\ln a)\leqslant f(0)$ 且 $f(0)=0$，

则 $\ln a=0$，可得：$a=1$.

(3)因为 $\exists x\in\left[0,+\infty\right)$，$f(x)<kg(x)$，即不等式 $f(x)<kg(x)$ 在区间 $\left[0,+\infty\right)$ 内有解.

设 $F(x)=f(x)-kg(x)=e^x+k\ln(x+1)-(k+1)x-1$，且 $F(0)=0$，

所以 $F'(x)=e^x+\dfrac{k}{x+1}-\left(k+1\right)$，且 $F'(0)=0$.

设 $h(x)=e^x+\dfrac{k}{x+1}-\left(k+1\right)$，且 $h(0)=0$，

当 $k\leqslant 0$ 时，$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$，

即 $F'(x)\geqslant 0$，所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，所以 $F(x)\geqslant F(0)=0$，即 $f(x)\geqslant kg(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立；

当 $k>0$ 时，$h'(x)=e^x-\dfrac{k}{\left(x+1\right)^2}$，且 $h'(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上是增函数，

所以 $h'(x)\geqslant h'(0)=1-k$，

①当 $k\leqslant 1$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，所以 $h(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上是增函数，

$h(x)\geqslant h(0)=0$，即 $F'(x)\geqslant 0$，所以 $F(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上是增函数，

所以 $F(x)\geqslant F(0)=0$，即 $f(x)\geqslant kg(x)$ 在 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 上恒成立.

②当 $k>1$ 时，

因为 $h'(0)=1-k<0$，$h'\left(k-1\right)=e^{k-1}-\dfrac{1}{k}>0$，

所以 $h'(x)$ 在 $\left(0,k-1\right)$ 上存在唯一零点 x_0，

当 $x\in\left[0,x_0\right)$ 时，$h'(x)<h'(x_0)=0$，$h(x)$ 在 $\left[0,x_0\right)$ 上单调递减，

从而 $h(x)\leqslant h(0)=0$，即 $F'(x)\leqslant 0$，所以 $F(x)$ 在 $\left[0,x_0\right)$ 上单调递减，

所以当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$F(x)<F(0)=0$，即 $f(x)<kg(x)$.

所以不等式 $f(x)<kg(x)$ 在区间 $\left[0,+\infty\right)$ 内有解.

综上所述，实数 k 的取值范围为 $\left(1,+\infty\right)$.

10．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-a(x+1)^2$.

(1)若函数 $f(x)\leqslant 0$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-1,1\right)$ 上有两个极值点，求实数 a 的取值范围；

(3)若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象与函数 $y=\ln x-1$ 的图象有两个不同的交点，求实数 a 的取值范围.

【解析】(1)$f(x)\leqslant 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}x^3\leqslant a(x+1)^2$，$x\in[0,1]$，

即当 $x\in[0,1]$ 时，$\dfrac{x^3}{(x+1)^2}\leqslant 3a$ 恒成立，

设 $g(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$，$x\in[0,1]$，

$g'(x)=\dfrac{3x^2(x+1)^2-x^3 2(x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$，

因为 $x\in\left[0,1\right]$，所以 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{4}$，所以 $3a\geqslant\dfrac{1}{4}$，$a\geqslant\dfrac{1}{12}$.

(2)因为 $f'(x)=x^2-2a(x+1)=x^2-2ax-2a$，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-1,1\right)$ 上有两个极值点的必要条件为 $f'(x)=x^2-2ax-2a$ 在区间 $\left(-1,1\right)$ 上有两个不同零点，

则$\begin{cases}-1<a<1, \\ \Delta=4a^2+4a>0, \\ f'(-1)>0, \\ f'(1)>0,\end{cases}$ 解得$0<a<\frac{1}{4}$，

当$a\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$时，$f'(x)$在$\left(-1,a\right]$上递减，在$\left[a,1\right)$上递增，

$f'(-1)=1>0$，$f'(a)=-a^2-2a<0$，$f'(1)=1-4a>0$，

所以存在唯一的$x_1\in(-1,a)$，$x_2\in(a,1)$使得$f'(x_1)=f'(x_2)=0$，

因为$f'(x)$在区间$\left(-1,x_1\right)$大于零，在区间$\left(x_1,x_2\right)$小于零，在区间$\left(x_2,1\right)$上大于零，

所以$f(x)$在区间$\left(-1,x_1\right)$上递增，在区间$\left(x_1,x_2\right)$上递减，在$\left(x_2,1\right)$上递增，

所以$f(x_1)$，$f(x_2)$分别为极大值与极小值，

所以当$0<a<\frac{1}{4}$时函数$f(x)$在区间$\left(-1,1\right)$上有两个极值点.

(3)解法一：因为$f'(x)=x^2-2a(x+1)=x^2-2ax-2a$，

由函数$f'(x)$的图象与函数$y=\ln x-1$的图象有两个不同的交点，

即方程$x^2-2ax-2a=\ln x-1$在$(0,+\infty)$上有两个不同的零点，

令$h(x)=x^2-2ax-2a-\ln x+1(x>0)$，

$h'(x)=2x-2a-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-2ax-1}{x}$，

令$h'(x)=0$，解得$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2+2}}{2}<0$(舍去)，$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2+2}}{2}>0$.

x	$\left(0,x_2\right)$	x_2	$\left(x_2,+\infty\right)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↓	极小值	↑

因为$h(x)$有两个零点，

所以$h(x_2)<0$，$h(x_2)=x_2^2-2ax_2-2a-\ln x_2+1<0$，①

又因为$2x_2^2-2ax_2-1=0$，所以$2x_2-\frac{1}{x_2}=2a$，②

代入①得到$-x_2^2-2x_2+\frac{1}{x_2}-\ln x_2+2<0$，

令$g(x)=-x^2-2x+\frac{1}{x}-\ln x+2(x>0)$，

$g'(x)=-2x-2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调整递减，

因为$g(1)=0$，所以$x_2>1$，

因为$2a=2x_2-\frac{1}{x_2}$在区间$(1,+\infty)$上递增，所以$a>\frac{1}{2}$.

(*i*)因为$2a=2x_2-\frac{1}{x_2}$，

所以$4a-x_2=3x_2-\frac{2}{x_2}=\frac{3x_2^2-2}{x_2}>0(x_2>1)$，

$h(4a)=8a^2-2a-\ln 4a+1(2a>1)$，

令$t=4a>2$，$a=\frac{1}{4}t$，

所以$h(4a)=\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}-\ln t+1=k(t)(t>2)$，

$k'(t)=t-\frac{1}{2}-\frac{1}{t}=\frac{2t^2-t-2}{2t}=\frac{t(2t-1)-2}{2t}>\frac{2\times3-2}{2t}>0$，

所以 $k(t)$在$(2，+\infty)$上递增，$k(2)=2-\ln 2>0$，
所以 $k(t)=h(4a)>0$，
所以 $h(x)$在区间$(x_2，4a)$上存在唯一一个零点;
(ii)又因为 $h(x)=x^2-2ax-2a-\ln x+1$
$=(x-a)^2-\ln x-(a+1)^2+2(x>0)$，
$h(e-(a+1)^2)=(e-(a+1)^2-a)^2+2>0$，
且 $0<e-(a+1)^2<1<x_2\left(a>\frac{1}{2}\right)$，
所以 $h(x)$在区间$(e-(a+1)^2，x_2)$上存在唯一一个零点，
综上 $a>\frac{1}{2}$时，$f'(x)$的图象与 $y=\ln x-1$ 的图象有两个不同的交点.
解法二：$f'(x)=x^2-2a(x+1)=x^2-2ax-2a$，
由 $x^2-2ax-2a=\ln x-1(x>0)$，
得$\frac{x^2-\ln x+1}{x+1}-2a=0(x>0)$，
令 $g(x)=\frac{x^2-\ln x+1}{x+1}-2a(x>0)$，
$g'(x)=\frac{x^2+2x+\ln x-\frac{1}{x}-2}{(x+1)^2}$，
令 $h(x)=x^2+2x+\ln x-\frac{1}{x}-2(x>0)$，
$h'(x)=2x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0.$
$h(1)=0$，所以当 $x\in(0，1)$时，$h(x)<0$，当 $x\in(1，+\infty)$时，$h(x)>0$，
即当 $x\in(0，1)$时，$g'(x)<0$，当 $x\in(1，+\infty)$时，$g'(x)>0$，
所以 $g(x)$在区间$(0，1)$上递减，在区间$(1，+\infty)$上递增，
所以 $g(1)=1-2a<0$ 即 $a>\frac{1}{2}$，
(i)当 $x\in(0，1)$时，因为 $x^2-\ln x+1>0$，
所以 $g(x)=\frac{x^2-\ln x+1}{x+1}-2a>\frac{x^2-\ln x+1}{2}-2a$，
取 $x=e^{-4a}\in(0，1)$，则
$g(e^{-4a})>\frac{(e^{-4a})^2+4a+1}{2}-2a=\frac{e^{-8a}+1}{2}>0$，
所以 $g(x)$在区间$(e^{-4a}，1)$上存在唯一一个零点;
(ii)当 $x\in(1，+\infty)$时，
$g(4a)=\frac{16a^2-\ln 4a+1}{4a+1}-2a=\frac{8a^2-\ln 4a+1-2a}{4a+1}$，
令 $h(a)=8a^2-2a-\ln 4a+1$，
$h'(a)=16a-2-\frac{1}{a}=16a-\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(a>\frac{1}{2}\right)$
因为 $16a>8$，$2+\frac{1}{a}<4$，所以 $16a-\left(2+\frac{1}{a}\right)>0$，
所以 $h(a)$在$\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$上递增，
$h\left(\frac{1}{2}\right)=2-\ln 2>0$，所以 $h(a)>0\left(a>\frac{1}{2}\right)$，
即 $g(4a)>0(4a>2)$，
所以 $g(x)$在区间$(1，4a)$上存在唯一一个零点.

综上 $a>\frac{1}{2}$时，$f'(x)$的图象与 $y=\ln x-1$ 的图象有两个不同的交点.

11．已知 $f(x)=e^x-x-1$，$g(x)=ax^2(a\in\mathbf{R})$.

(1)设 $F(x)=f(x)-g(x)+2$，若当 $a\in(t，+\infty)$时，$F(x)$有三个不同的零点，求 t 的最小值；

(2)当 $x\in(0，+\infty)$时，$[f(x)+x]\ln(x+1)\geqslant g(x)$恒成立，求 a 的取值范围.

【解析】(1)$F(x)=e^x-ax^2-x+1$，$\therefore F'(x)=e^x-2ax-1$，$F''(x)=e^x-2a$，

当 $a\leqslant0$ 时，$F''(x)>0$，$F'(x)$单调递增，又 $F'(0)=0$，

当 $x\in(-\infty，0)$时，$F'(x)<0$，故 $F(x)$在区间$(-\infty，0)$上单调递减；

当 $x\in(0，+\infty)$时，$F'(x)>0$，故 $F(x)$在区间$(0，+\infty)$上单调递增，

所以 $F(x)\geqslant F(0)=2$，此时 $F(x)$与 x 轴没有交点，即没有零点，不合题意.

当 $a>0$ 时，由 $F''(x)=e^x-2a=0$，得 $x=\ln(2a)$，

所以 $F'(x)$在区间$(-\infty，\ln(2a))$上单调递减，在区间$(\ln(2a)，+\infty)$上单调递增，

$\because F'(0)=0$，$F'\left(-\frac{1}{2a}\right)=e-\frac{1}{2a}>0$，

$\therefore$若 $0<a<\frac{1}{2}$，则在区间$(-\infty，\ln(2a)]$上存在 x_1，

当 $x\in(-\infty，x_1)$时，$F'(x)>0$，当 $x\in(x_1，0)$时，$F'(x)<0$，当 $x\in(0，+\infty)$时，$F'(x)>0$，

$\therefore F(x)$在区间$(-\infty，x_1)$上单调递增，在区间$(x_1，0)$上单调递减，在区间$(0，+\infty)$上单调递增，又 $F(0)=2$，此时函数 $F(x)$有且只有一个零点.

当 $a>\frac{1}{2}$时，存在 $x_2\in(\ln(2a)，+\infty)$，使得 $F'(x_2)=ex_2-2ax_2-1=0$，$\therefore F(x)$在区间$(-\infty，0)$上单调递增，在区间$(0，x_2)$上单调递减，在区间$(x_2，+\infty)$上单调递增，

由 $F(0)=2>0$，从而要使 $F(x)$有三个零点，必有 $F(x_2)=ex_2-ax_2^2-x_2+1<0$，

$\therefore ax_2^2-(2a-1)x_2-2>0$，即$(x_2-2)(ax_2+1)>0$，

$\therefore x_2>2$，

又$\because a=\frac{ex_2-1}{2x_2}$，令 $h(x)=\frac{e^x-1}{2x}$，

则 $h'(x)=\frac{(x-1)e^x+1}{2x^2}$，

$\because$当 $x>2$ 时，$h'(x)>0$，

$\therefore h(x)$在区间$(2，+\infty)$单调递增，

$\therefore a>h(2)=\frac{e^2-1}{4}$，即 $t_{\min}=\frac{e^2-1}{4}$.

(2)$[f(x)+x]\ln(x+1)\geqslant ax^2$，

即$(e^x-1)\ln(x+1)\geqslant ax^2$，

$$\therefore a\leqslant\frac{(e^x-1)\ln(x+1)}{x^2}=\frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{x}{\ln(x+1)}}=\frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{e^{\ln(x+1)}-1}{\ln(x+1)}}，$$

令 $m(x)=\frac{e^x-1}{x}$，则 $m'(x)=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$，

令 $\varphi(x)=(x-1)e^x+1$，则 $\varphi'(x)=xe^x$，

$\because x>0$，$\therefore \phi'(x)>0$，$\phi(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

$\therefore \phi(x)>\varphi(0)=1-\frac{1}{e}>0$，于是 $m(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

又由(1)知当 $x\in(0，+\infty)$时，$e^x>x+1$ 恒成立，

$\therefore x>\ln(x+1)$，

$\therefore\frac{m(x)}{m(\ln(x+1))}>1$，$a\leqslant1$，

$\therefore a$ 的取值范围是$(-\infty，1]$.

12．已知 $f(x)=ax^2+bx+5-\ln^2 x$.
(1)当 $a=0$ 时，若 $f(x)$有两个极值点 x_1，x_2，求证：$x_1+x_2>2e$；
(2)若 $f(x)$在定义域内单调递增，求 $a+b$ 的最小值；
(3)当 $a\geqslant 2e^2$ 时，判断 $f(x)$的零点个数.

【解析】(1)当 $a=0$ 时，$f'(x)=b-\dfrac{2\ln x}{x}$，因为 $f(x)$有两个极值点 x_1，x_2，

所以 $b-\dfrac{2\ln x_1}{x_1}=0$，$b-\dfrac{2\ln x_2}{x_2}=0$，即 $2\ln x_1=bx_1$，$2\ln x_2=bx_2$，从而$\dfrac{2}{b}=\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$，

令 $g(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>e$ 时，$g'(x)<0$，

所以函数 $g(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$在$(0，e)$上递增，在$(e，+\infty)$上递减，所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\dfrac{2}{e}$，

又因当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$时，$g(x)\to 0$，

所以 $0<b<\dfrac{2}{e}$，由对数均值不等式得$\dfrac{2}{b}=\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$，

从而 $x_2+x_2>\dfrac{4}{b}>2e$，所以 $x_1+x_2>2e$.

(2)$f'(x)=2ax+b-\dfrac{2\ln x}{x}$，$x\in(0，+\infty)$，

因为 $f(x)$在定义域内单调递增，

所以 $f'(x)=2ax+b-\dfrac{2\ln x}{x}\geqslant 0$ 在 $x\in(0，+\infty)$上恒成立，

故 $b\geqslant\dfrac{2\ln x}{x}-2ax$，设 $S(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-2ax$，

若 $a<0$，则当 $x>1$ 时，$\dfrac{2\ln x}{x}>0$，故 $b\geqslant-2ax$ 在$(0，+\infty)$上恒成立，这不可能.

若 $a=0$，则 $b\geqslant\dfrac{2\ln x}{x}$在$(0，+\infty)$上恒成立，取 $x=e$，则有 $b\geqslant\dfrac{2}{e}$，故 $a+b\geqslant\dfrac{2}{e}$.

若 $a>0$，此时 $S'(x)=2\times\dfrac{1-\ln x-ax^2}{x^2}$，

令 $T(x)=1-\ln x-ax^2$，则 $T(x)$为$(0，+\infty)$上的减函数，

而 $T(e)=-ae^2\leqslant 0$，

取 $M=\min\left(e^{\frac{1}{2}}，\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$，则当 $0<x<M$ 时，

有 $T(x)>\dfrac{1}{2}-\ln x>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$，故 $T(x)$在$(0，+\infty)$上存在唯一零点，

设该零点为 x_0，由零点存在定理可得 $0<x_0<e$.

故当 $0<x<x_0$ 时，$S'(x)>0$；当 $x>x_0$ 时，$S'(x)<0$，

故 $S(x)$在$(0，x_0)$为增函数，在$(x_0，+\infty)$上为减函数，故 $S(x)_{\max}=S(x_0)$.

所以 $b\geqslant\dfrac{2\ln x_0}{x_0}-2ax_0$，

因为 $1-\ln x_0-ax_0^2=0$，故 $a=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}$，

所以 $b+a\geqslant\dfrac{4x_0\ln x_0-2x_0+1-\ln x_0}{x_0^2}$，其中 $0<x_0<e$.

设 $u(x)=\dfrac{4x\ln x-2x+1-\ln x}{x^2}$，$0<x<e$，

则 $u'(x)=\dfrac{(2x-1)(3-2\ln x)}{x^3}$，

当 $0<x<\dfrac{1}{2}$时，$u'(x)<0$，当$\dfrac{1}{2}<x<e$ 时，$u'(x)>0$，

故 $u(x)$在$\left(0, \frac{1}{2}\right)$为减函数，在$\left(\frac{1}{2}, \mathrm{e}\right)$为增函数，

故 $u(x)_{\min}=u\left(\frac{1}{2}\right)=-4\ln 2$，故 $b+a\geqslant -4\ln 2$，

即 $b+a$ 的最小值为 $-4\ln 2$.

(3)$f(x)=ax^2+bx+5-\ln^2x=0\Leftrightarrow b=\frac{\ln^2x-5}{x}-ax(x>0)$，

令 $h(x)=\frac{\ln^2x-5}{x}-ax(x>0)$，

则 $h'(x)=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\ln^2x+5}{x^2}-a=\frac{2\ln x-\ln^2x+5}{x^2}-a$，

令 $p(x)=\frac{2\ln x-\ln^2x+5}{x^2}$，

则 $p'(x)=\frac{\left(\frac{2}{x}-2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)x^2-2x(2\ln x-\ln^2x+5)}{x^4}=\frac{2(\ln^2x-3\ln x-4)}{x^3}$，

由 $p'(x)>0$，得 $\ln x>4$ 或 $\ln x<-1$，即 $x>\mathrm{e}^4$ 或 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

当 $-1<\ln x<4$，即$\frac{1}{\mathrm{e}}<x<\mathrm{e}^4$，时，函数 $p'(x)<0$，

所以函数 $p(x)=\frac{2\ln x-\ln^2x+5}{x^2}$在$(\mathrm{e}^4, +\infty)$，$\left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$上递增，在$\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}^4\right)$上递减，

又 $p\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=2\mathrm{e}^2$，$p(\mathrm{e}^4)=\frac{-3}{\mathrm{e}^8}$，当 $x\to+\infty$时，$p(x)\to 0$, 当 $x\to 0_+$时，$p(x)\to-\infty$，

所以 $p(x)\in(-\infty, 2\mathrm{e}^2)$，

当 $a\geqslant 2\mathrm{e}^2$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，故函数 $h(x)=\frac{\ln^2x-5}{x}-ax$ 在$(0, +\infty)$上递减，

又当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$时，$h(x)\to-\infty$，

所以方程 $b=\frac{\ln^2x-5}{x}-ax$ 只有一实根，即函数 $f(x)$有一个零点.

13．已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $0<a<\frac{1}{2}$，函数 $f(x)$有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，不等式 $f(x_1)\geqslant mx_2$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

(2)若 $f(x)\leqslant x\mathrm{e}^{x-1}-2$ 在$(1, +\infty)$恒成立，求正实数 a 的取值范围.

【解析】(1)$f(x)=x^2-2x+a\ln x(a\in\mathbf{R})$定义域为$(0, +\infty)$，

$f'(x)=2x-2+\frac{a}{x}=\frac{2x^2-2x+a}{x}(x>0)$，

当 $0<a<\frac{1}{2}$，函数 $f(x)$有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，

由 $f'(x)=0$ 可得 $2x^2-2x+a=0$，

则 $x_1+x_2=1$，$x_1=\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}$，

由 $0<a<\frac{1}{2}$，可得 $0<x_1<\frac{1}{2}<x_2<1$，

所以不等式 $f(x_1)\geqslant mx_2$ 恒成立，等价于 $m\leqslant\frac{f(x_1)}{x_2}$恒成立，

$\frac{f(x_1)}{x_2}=\frac{x_1^2-2x_1+a\ln x_1}{1-x_1}=\frac{x_1^2-2x_1+(2x_1-2x_1^2)\ln x_1}{1-x_1}$

$=\frac{-x_1(1-x_1)+(1-x_1)-1+2x_1(1-x_1)\ln x_1}{1-x_1}$

$=1-x_1+\dfrac{1}{x_1-1}+2x_1\ln x_1$，

令 $h(x)=1-x+\dfrac{1}{x-1}+2x\ln x\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$，

则 $h'(x)=-1-\dfrac{1}{(x-1)^2}+2\ln x+2=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}+2\ln x$，

因为 $0<x<\dfrac{1}{2}$，所以 $-1<x-1<-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}<(x-1)^2<1$，$-4<-\dfrac{1}{(x-1)^2}<-1$，

因为 $2\ln x<0$，所以 $h'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}+2\ln x<0$，

所以 $h(x)=1-x+\dfrac{1}{x-1}+2x\ln x$ 在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递减，

所以 $h(x)>h\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}-1}+2\times\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}-\ln 2$，即$\dfrac{f(x_1)}{x_2}>-\dfrac{3}{2}-\ln 2$，

故实数 m 的取值范围为 $m\leqslant-\dfrac{3}{2}-\ln 2$.

(2)若 $f(x)\leqslant xe^{x-1}-2$ 在$(1,+\infty)$恒成立，

即 $x^2-2x+a\ln x-xe^{x-1}+2\leqslant 0$ 对于 $x\in(1,+\infty)$恒成立;

令 $g(x)=x^2-2x+a\ln x-xe^{x-1}+2$，$x\in(1,+\infty)$，

$g(1)=0$，则 $g(x)_{\max}\leqslant 0$，

则 $g'(x)=2x-2+\dfrac{a}{x}-(x+1)e^{x-1}$，

令 $u(x)=2x-2+\dfrac{a}{x}-(x+1)e^{x-1}$，$u(1)=a-2$，

则 $u'(x)=2-\dfrac{a}{x^2}-(x+2)e^{x-1}$，

令 $t(x)=2-(x+2)e^{x-1}$，则 $t'(x)=-(x+3)e^{x-1}<0$，

所以 $t(x)=2-(x+2)e^{x-1}$ 在$(1,+\infty)$上单调递减，$t(x)<t(1)=2-3=-1<0$，

因为 $a>0$，所以 $u'(x)=2-\dfrac{a}{x^2}-(x+2)e^{x-1}=t(x)-\dfrac{a}{x^2}<0$，

所以 $u(x)=2x-2+\dfrac{a}{x}-(x+1)e^{x-1}$ 在$(1,+\infty)$上单调递减，即 $g'(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

当 $0<a\leqslant 2$ 时，$g'(x)\leqslant g'(1)\leqslant 0$，对于 $x\in(1,+\infty)$恒成立，

所以 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以 $g(x)<g(1)=0$ 恒成立，符合题意;

当 $a>2$ 时，存在实数 $x_0>1$，使得函数 $g(x)$在$(1,x_0)$上单调递增，

此时 $g(x)>g(1)=0$，不符合题意，

综上所述，正实数 a 的取值范围为$(0,2]$.

14．已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)已知 $x=1$ 为 $f(x)$的极值点，求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(2)当 $a<-\dfrac{1}{2}$时，若对于任意 x_1，$x_2\in(1,+\infty)(x_1<x_2)$，都存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(x_0)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，证明：$\dfrac{x_2+x_1}{2}<x_0$.

【解析】(1)$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(2-a)$，由 $x=1$ 为 $f(x)$的极值点.

所以 $f'(1)=1-2a+(2-a)=0$，解得 $a=1$，

则 $f(1)=-1+(2-1)=0$，$k=f'(1)=1-2+2-1=0$，

所以过点$(1,0)$的切线方程为 $y=0$.

(2)$f(x_2)-f(x_1)$

$=\ln x_2-ax_2^2+(2-a)x_2-[\ln x_1-ax_1^2+(2-a)x_1]$

$=\ln\dfrac{x_2}{x_1}-a(x_2+x_1)(x_2-x_1)+(2-a)(x_2-x_1)$，

所以 $f'(x_0)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-a(x_2+x_1)+(2-a)$，又 $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}-2ax_0+(2-a)$，

所以$\dfrac{1}{x_0}-2ax_0+(2-a)=\dfrac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-a(x_2+x_1)+(2-a)$，即$\dfrac{1}{x_0}-2ax_0=\dfrac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-a(x_2+x_1)$，

则 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)-f'(x_0)$

$=\dfrac{2}{x_1+x_2}-a(x_1+x_2)-\left(\dfrac{1}{x_0}-2ax_0\right)$

$=\dfrac{2}{x_1+x_2}-a(x_1+x_2)-\dfrac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}+a(x_2+x_1)$

$=\dfrac{2}{x_1+x_2}-\dfrac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{x_2-x_1}\left[\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}-\ln\dfrac{x_2}{x_1}\right]$

$=\dfrac{1}{x_2-x_1}\left[\dfrac{2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{\frac{x_2}{x_1}+1}-\ln\dfrac{x_2}{x_1}\right]$

由 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，设 $\varphi(t)=\dfrac{2(t-1)}{t+1}-\ln t$，$t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，则 $\varphi'(t)=-\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}<0$，

所以 $\varphi(t)$在$(1，+\infty)$ 上单调递减，所以 $\varphi(t)<\varphi(1)=0$，

所以$f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)-f'(x_0)<0$ 恒成立，即 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<f'(x_0)$，

由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(2-a)$，则 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}-2a$，$x>1$，由 $a<-\dfrac{1}{2}$，则 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}-2a>0$ 在 $x>1$ 时恒成立，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(2-a)$在$(1，+\infty)$上单调递增.

所以由 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<f'(x_0)$，可得$\dfrac{x_2+x_1}{2}<x_0$成立.

15．已知函数 $f(x)=(x+1)e^x-\dfrac{1}{x}(x>0)$，$g(x)=xe^x+a\ln x(a\in\mathbf{R})$，且 $f(x_1)=0$.

(1)若 $a=1$，且 $g(x_0)=0$，试比较 x_0 与 x_1 的大小关系，并说明理由；

(2)若 $a=-1$，且$(x_2+1)f(x_2)=g(x_2)$，证明：

(i)$\dfrac{5}{9}<x_2<\dfrac{5}{3e}$；

(ii)$ex_1-x_2>\dfrac{3-2x_2}{3-2x_1}$.

(参考数据：$\ln 3\approx1.098$，$\ln 5\approx1.609$，$\dfrac{1}{e}\approx0.368$)

【解析】(1)对函数 $f(x)$，$g(x)$求导得:

$f'(x)=(x+2)e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$，$g'(x)=(x+1)e^x+\dfrac{1}{x}>0$，故 $f(x)$，$g(x)$在$(0，+\infty)$上均单调递增.

当 $x\to0$ 时，$f(x)$，$g(x)\to-\infty$.

而 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\sqrt{e}-2$，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{e}}{2}-\ln 2$.

由 $e>1.5^2$，$\ln 2=\dfrac{1}{4}\ln 16<\dfrac{3}{4}<\dfrac{\sqrt{e}}{2}$知

$f\left(\frac{1}{2}\right)>0$，$g\left(\frac{1}{2}\right)>0$，

因此 x_0，x_1 唯一且 x_0，$x_1\in\left(0，\frac{1}{2}\right)$，

由 $(x_1+1)ex_1-\frac{1}{x_1}=0$ 知 $ex_1=\frac{1}{x_1（x_1+1）}$，$g(x_1)=\frac{1}{x_1+1}+\ln x_1$.

构造 $m(x)=\frac{1}{x+1}+\ln x(x>0)$，

则 $m'(x)=\frac{x^2+x+1}{x（x+1）^2}>0$.

因此 $g(x_1)=m(x_1)<m\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}-\ln 2$，

由 $\ln 2=\frac{1}{3}\ln 8>\frac{2}{3}$知 $g(x_1)<0$.

故 $g(x_1)<g(x_0)$，结合 $g(x)$单调性知 $x_0>x_1$.

(2)(i)由题意得$(x_2^2+x_2+1)(ex_2+\ln x_2-1)+x_2(x_2+\ln x_2)=0$.

构造 $r(x)=e^x-x-1$，则 $r'(x)=e^x-1$，$r(x)\geqslant r(0)=0$.

因此 $e^x\geqslant x+1$.

因此 $0=(x_2^2+x_2+1)(ex_2+\ln x_2-1)+x_2(x_2+\ln x_2)\geqslant(x_2+1)^2(x_2+\ln x_2)$，

故 $x_2+\ln x_2\leqslant 0$.

又 $0=(x_2^2+x_2+1)(ex_2+\ln x_2-1)+x_2(x_2+\ln x_2)\leqslant(x_2^2+x_2+1)(ex_2+\ln x_2-1)$，

故 $x_2+\ln x_2\geqslant 0$.

因此 $x_2+\ln x_2=0$.

构造 $\varphi(x)=x+\ln x(x>0)$，则 $\varphi'(x)=1+\frac{1}{x}>0$.

而 $\varphi\left(\frac{5}{9}\right)=\frac{5}{9}+\ln 5-2\ln 3<0$，$\phi\left(\frac{5}{3e}\right)=\frac{5}{3e}+\ln 5-\ln 3-1>0$，因此$\frac{5}{9}<x_2<\frac{5}{3e}$.

(ii)由 $x_2+\ln x_2=0$ 知 $ex_2=\frac{1}{x_2}$.

因此 $f(1-x_2)=\frac{e（2-x_2）}{ex_2}-\frac{1}{1-x_2}$

$=\frac{x_2（1-x_2）（2-x_2）-\frac{1}{e}}{e（1-x_2）}$.

构造 $t(x)=x(1-x)(2-x)-\frac{1}{e}$，

则 $t'(x)=3x^2-6x+2$.

因此 $t(x)$在$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}，1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上单调递减.

因此 $t(x_2)<t\left(\frac{5}{9}\right)<0.36-\frac{1}{e}<0$，故 $f(1-x_2)<0$.

因此 $f(1-x_2)<f(x_1)$，结合 $f(x)$单调性知 $1-x_2<x_1$，故 $x_2>1-x_1$.

构造 $h(x)=(3-2x)e^x(x>0)$，$H(x)=h(x)-h(1-x)$，则 $h'(x)=(1-2x)e^x$.

因此 $h(x)$在$\left(0，\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2}，1\right)$上单调递减.

而当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$时，$H'(x)=(1-2x)(e^x-e^{1-x})\leqslant 0$，

$H(x)$单调递减.

因此 $H(x_1)>H\left(\frac{1}{2}\right)>0$，$h(x_1)>h(1-x_1)$.

而$\frac{1}{2}<1-x_1<x_2<1$，因此 $h(x_2)<h(1-x_1)$，

因此 $h(x_1)>h(x_2)$.

因此 $\mathrm{e}x_1-x_2>\dfrac{3-2x_2}{3-2x_1}$.

16．已知函数 $f(x)=(1-x)\ln x-ax$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)若函数 $f(x)$ 有且只有 1 个零点 m，求 a 和 m；

(2)若函数 $f(x)$ 有两个零点.

(ⅰ)求证：$a<0$；

(ⅱ)设 x_0 为函数 $f(x)$ 的极大值点，x_1 为函数 $f(x)$ 的零点，且 $x_1<x_0$，求证：$2x_0+x_1>2\sqrt{2}$.

【解析】(1)$f(x)$ 的定义域为 $\left(0，+\infty\right)$，

$f'(x)=-\ln x+\dfrac{1}{x}-1-a$.

因为 $f''(x)=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}<0$，

所以 $f'(x)$ 在 $\left(0，+\infty\right)$ 上单调递减.

又因为 $0<\mathrm{e}-a^2-a-1<\mathrm{e}a^2-a+2$，

$f'(\mathrm{e}-a^2-a-1)=a^2+a+1+\dfrac{1}{\mathrm{e}-a^2-a-1}-1-a=a^2+\dfrac{1}{\mathrm{e}-a^2-a-1}>0$，

$f'(\mathrm{e}a^2-a+2)=-a^2+a-2+\dfrac{1}{\mathrm{e}a^2-a+2}-1-a=-a^2+\mathrm{e}-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{4}-3<-a^2+1-3=-a^2-2<0$，

且 $f'(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上连续，所以，由函数的零点存在性定理，存在 $k\in(\mathrm{e}-a^2-a-1，\mathrm{e}a^2-a+2)$，使得 $f(k)=0$，即 $a=-\ln k+\dfrac{1}{k}-1$. ①

当 $x\in(0，k)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(k，+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.所以 $f(x)$ 在 $(0，k)$ 上单调递增，在 $(k，+\infty)$ 上单调递减，所以，当 $x=k$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值，也是最大值.

$f(k)=(1-k)\ln k-ak=(1-k)\ln k-\left(-\ln k+\dfrac{1}{k}-1\right)\cdot k=\ln k+k-1$.

易知，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$.

若函数 $f(x)$ 有且只有 1 个零点 m，

则 $f(k)=\ln k+k-1=0$，且 $k=m$，从而 $\ln m+m-1=0$.

记 $g(x)=\ln x+x-1$，$x\in(0，+\infty)$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增. 又因为 $g(1)=0$，所以 $m=1$.

将 $m=1$ 代入①得 $a=-\ln 1+1-1=0$.

所以，$a=0$，$m=1$.

(2)(ⅰ)由(1)，当 $x=k$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值

$f(k)=\ln k+k-1$.

若函数 $f(x)$ 有两个零点，则 $\ln k+k-1>0$，又 $g(x)=\ln x+x-1$ 在 $(0，+\infty)$ 单调递增且 $g(1)=0$，所以 $k>1$.

记 $h(k)=-\ln k+\dfrac{1}{k}-1$，$k>1$.

因为 $h'(k)=-\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k^2}<0$，所以 $h(k)$ 在 $(1，+\infty)$ 上单调递减，从而 $h(k)<h(1)=0$，又 $a=h(k)$，所以 $a<0$.

(ⅱ)由(1)及(2)(ⅰ)可知，$x_0=k$，$a<0$.

所以 $f(1)=-a>0$，且 $f'(1)=-a>0$，

由条件可知 $0<x_1<1<x_0$，

$f'(x_0)=-\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}-1-a=0$，

$f(x_1)=(1-x_1)\ln x_1-ax_1=0$，

所以 $a=\dfrac{(1-x_1)\ln x_1}{x_1}=-\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}-1$，

故 $\ln x_1=\dfrac{x_1}{1-x_1}\cdot\left(-\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}-1\right)$.

又因为 $\ln x<x-1$ 在 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$上恒成立，所以$\dfrac{x_1}{1-x_1}\cdot\left(-\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}-1\right)<x_1-1$，

整理得 $\ln x_0>\dfrac{(1-x_1)^2}{x_1}+\dfrac{1}{x_0}-1$.

所以 $x_0-1>\dfrac{(1-x_1)^2}{x_1}+\dfrac{1}{x_0}-1$，移项整理得 $x_0>x_1+\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_0}-2$.

又因为 $0<x_1<1<x_0$，结合均值不等式可得：

$2x_0+x_1>2x_1+\dfrac{1}{x_1}+x_0+\dfrac{1}{x_0}-2$

$>2\sqrt{2x_1\cdot\dfrac{1}{x_1}}+2\sqrt{x_0\cdot\dfrac{1}{x_0}}-2=2\sqrt{2}$.

17．已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2$.

(1)若 $f(x)$在定义域内有 2 个零点，求 a 的取值范围；

(2)若$\forall p\in[0，+\infty)$，函数 $g(x)=x^p\cdot f(x)$在定义域内单调递减，求 a 的最小值.

【解析】(1)$\because f(x)=x\ln x-ax^2$ 在定义域内有 2 个零点，

$\therefore y=\dfrac{\ln x}{x}$与 $y=a$ 在 $x\in(0,+\infty)$内有 2 个不同的交点，

令 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，

$\because h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

$\therefore h(x)$在$(0,\mathrm{e})$单调递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$单调递减，

$\because \lim\limits_{x\to 0}h(x)\to-\infty$，$h(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\to 0$，

$\therefore a\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(2)$\because g(x)=x^p\cdot f(x)=x^{p+1}(\ln x-ax)$在 $x\in(0,+\infty)$单调递减，

$\therefore g'(x)=(p+1)x^p(\ln x-ax)+x^{p+1}\left(\dfrac{1}{x}-a\right)$

$=x^p[(p+1)\ln x-a(p+2)x+1]\leqslant 0$ 恒成立，

令 $F(x)=(p+1)\ln x-a(p+2)x+1$，$x\in(0,+\infty)$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，

$\because F(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，且$\lim\limits_{x\to 0}F(x)\to-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)\to+\infty$，

$\therefore\exists$唯一的 $x_0\in(0,+\infty)$，满足 $F(x_0)=0$，$g(x)$在$(0,x_0)$单调递减，在$(x_0,+\infty)$单调递增，不合题意，舍去；

②当 $a>0$ 时，

$\because F'(x)=\dfrac{p+1}{x}-a(p+2)$，

$\therefore F(x)$在$\left(0,\dfrac{p+1}{a(p+2)}\right)$单调递增，在$\left(\dfrac{p+1}{a(p+2)},+\infty\right)$单调递减，

$\therefore F(x)_{\max}=F\left(\dfrac{p+1}{a(p+2)}\right)=(p+1)\ln\dfrac{p+1}{a(p+2)}-p\leqslant 0$，即$\forall p\in[0,+\infty)$，$\ln a\geqslant\ln\dfrac{p+1}{p+2}-\dfrac{p}{p+1}$恒成立，

令 $G(p)=\ln\dfrac{p+1}{p+2}-\dfrac{p}{p+1}=\ln(p+1)-\ln(p+2)+\dfrac{1}{p+1}-1$，$p\in[0,+\infty)$，

$\therefore G'(p)=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}-\frac{1}{(p+1)^2}=\frac{-1}{(p+2)(p+1)^2}$，

$\therefore G(p)$在$[0,+\infty)$单调递减，即 $G_{max}(p)=G(0)=\ln\frac{1}{2}$，

$\therefore \ln a\geqslant\ln\frac{1}{2}$，即 a 的最小值为$\frac{1}{2}$.

18．已知函数$f(x)=a\ln x+x-1$，$g(x)=x^3-1$.

(1)若$f(x)\geqslant 1-x$ 恒成立，求实数 a 的值；

(2)用 $\min\{m，n\}$表示 $m，n$ 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x)，g(x)\}(x>0)$，讨论 $h(x)$零点的个数.

【解析】(1)由题意，$x>0$，$f(x)\geqslant 1-x$，

即 $a\ln x+2x-2\geqslant 0$，

令 $G(x)=a\ln x+2x-2$，则 $G'(x)=\frac{a}{x}+2=\frac{a+2x}{x}$.

当 $a>0$ 时，$G'(x)>0$，$G(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，而 $G(1)=0$，

故 $x\in(0，1)$时，$G(x)<0$ 成立，与题设不符，舍；

当 $-2<a<0$ 时，$0<-\frac{a}{2}<1$，

令 $G'(x)=0$，得 $x=-\frac{a}{2}$，

当 $x\in\left(0，-\frac{a}{2}\right)$时，$G'(x)<0$，$G(x)$单调递减，

当 $x\in\left(-\frac{a}{2}，+\infty\right)$时，$G'(x)>0$，$G(x)$单调递增，

$\because G(1)=0$，$\therefore G\left(-\frac{a}{2}\right)<0$，不符题意，舍；

当 $a<-2$ 时，$-\frac{a}{2}>1$，令 $G'(x)=0$，得 $x=-\frac{a}{2}$，

当 $x\in\left(0，-\frac{a}{2}\right)$时，$G'(x)<0$，$G(x)$单调递减，当 $x\in\left(-\frac{a}{2}，+\infty\right)$时，$G'(x)>0$，$G(x)$单调递增，

$\because G(1)=0$，$\therefore G\left(-\frac{a}{2}\right)<0$，不符题意，舍；

当 $a=-2$ 时，$-\frac{a}{2}=1$，令 $G'(x)=0$，得 $x=-\frac{a}{2}=1$，

当 $x\in(0，1)$时，$G'(x)<0$，$G(x)$单调递减，当 $x\in(1，+\infty)$时，$G'(x)>0$，$G(x)$单调递增，

$\therefore G(1)=0$ 为极小值，$\therefore G(x)\geqslant 0$ 恒成立.

综上，若$f(x)\geqslant 1-x$ 恒成立，$a=-2$.(也可以用必要条件探路或者分离参数得结果)

(2)当 $0<x<1$ 时，$g(x)=x^3-1<0$，所以 $h(x)\leqslant g(x)<0$，无零点；

当 $x=1$ 时，$f(1)=g(1)=0$，从而 $h(1)=0$，故 $x=1$ 为 $h(x)$的一个零点；

当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，则 $h(x)$的零点即为 $f(x)$的零点；

又 $f'(x)=\frac{a}{x}+1=\frac{x+a}{x}$，所以

①当 $a\geqslant -1$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$在$(1，+\infty)$上单调递增，$f(x)>f(1)=0$，此时 $h(x)$无零点；

②当 $a<-1$ 时，令 $f'(x)=0$，解得：$x=-a$，

易知 $f(x)$在$(1，-a)$上单调递减，在$(-a，+\infty)$上单调递增，又 $f(1)=0$，$\therefore f(-a)<0$，

另外，由(1)知，$\ln x\leqslant x-1$ 对 $x>0$ 恒成立，

则 $\ln(4a^2)=2\ln(-2a)\leqslant 2(-2a-1)$；

所以 $f(4a^2)=a\ln(4a^2)+4a^2-1\geqslant a\times 2(-2a-1)+4a^2-1=-2a-1>0$，

故存在 $x_0\in(-a，+\infty)$，使 $f(x_0)=0$，即 $h(x_0)=0$，
此时，$h(x)$在$(1，+\infty)$上存在唯一零点，
综上，$a\geqslant-1$ 时，$h(x)$有一个零点，当 $a<-1$ 时，$h(x)$有 2 个零点.